Les outils mathématiques utilisés en spécialité physique-chimie en terminale

Côté maths 1 : Utiliser la fonction logarithme décimal

Côté maths

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-\log(x)$.
1. Calculer l'image de $x=10^{-3}$ par la fonction f.
2. Calculer l'antécédent de 4 par la fonction f.

Méthode

1. $f(10^{-3})=-\log(10^{-3})$
$\Leftrightarrow f(10^{-3})=-(-3)$
$\Leftrightarrow f(10^{-3})=3$
2. $f(x)=-\log(x)=4$
$\Leftrightarrow \log(x)=-4$
$\Leftrightarrow 10^{\log(x)}=x=10^{-4}$ donc $x=0{,}0001$

Côté physique & chimie

Soient deux solutions aqueuses S_1 et S_2.
1. Calculer le pH de S_1 de concentration en ions oxonium $[H_3O^+]=1{,}0\times10^{-3}\ mol\cdot L^{-1}$.
2. Calculer la concentration en ions oxonium de S_2 dont le pH = 4,0.

Méthode

1. $pH=-\log\left(\dfrac{[H_3O^+]}{c^\circ}\right)=-\log\left(\dfrac{1{,}0\times10^{-3}\ mol\cdot L^{-1}}{1\ mol\cdot L^{-1}}\right)=3{,}0$

2. $[H_3O^+]=c^\circ\times10^{-pH}$
$=1\ mol\cdot L^{-1}\times10^{-4{,}0}$
$=1{,}0\times10^{-4}\ mol\cdot L^{-1}$

À retenir !

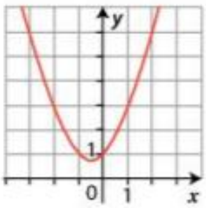
La fonction logarithme décimal log est la fonction réciproque de la fonction f telle que $f(x)=10^x$.

$x=\log(10^x)$ et $x=10^{\log(x)}$, pour $x>0$.

Côté maths 2 : Déterminer la valeur d'une dérivée

Côté maths

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x+1$.
Sa représentation graphique est donnée ci-dessous :

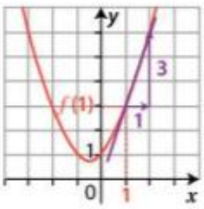


• Déterminer, par le calcul puis graphiquement, la valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x=1$.

Méthode

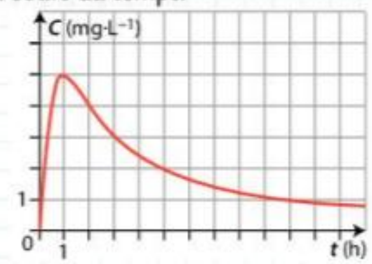
• La valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x=1$ est égale à $f'(1)$:
$f'(x)=2x+1$;
donc $f'(1)=2\times1+1=3$.

On peut retrouver graphiquement cette valeur sur le schéma ci-contre. Le coefficient directeur m de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x=1$ est :
$m=\dfrac{3}{1}=3$.



Côté physique & chimie

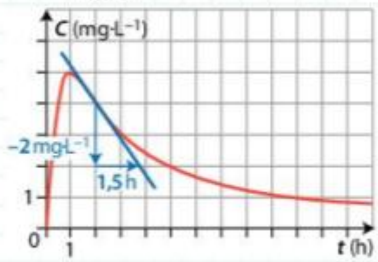
Un médicament est administré à un patient. La courbe suivante indique la concentration C du médicament dans le sang au cours du temps.



• Estimer graphiquement la valeur de la vitesse d'élimination (de disparition) $v(t)=-\dfrac{dC}{dt}$ du médicament, à la date $t=2{,}0$ h.

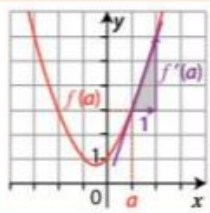
Méthode

• À la date $t=2{,}0$ h, $\dfrac{dC}{dt}$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $t=2{,}0$ h :
$v_2=-\dfrac{dC}{dt}=-\dfrac{-2{,}0\ mg\cdot L^{-1}}{1{,}5\ h}=1{,}3\ mg\cdot L^{-1}\cdot h^{-1}$.



À retenir !

• Soient une fonction f dérivable en un réel a et le point A de coordonnées $(a\,;f(a))$.
La tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.
• En physique-chimie, le coefficient directeur de la tangente possède une unité qui doit être précisée.



Côté maths 3 : Résoudre une équation différentielle du premier ordre

Côté maths

La fonction f vérifie l'équation différentielle suivante :

$$f'(x) + a \times f(x) = 0$$

La condition initiale est $f(0) = 3$.

1. Donner l'expression de la solution de l'équation différentielle.

2. Déterminer la solution de cette équation, compte tenu de la condition initiale et de la condition aux limites.

Méthode

1. $f'(x) + a \times f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -a \times f(x)$

Donc la fonction dérivée f' est proportionnelle à la fonction f.

La solution est donc de la forme $f(x) = K \times \exp(-ax)$.

2. On utilise la condition initiale :

$$f(0) = 3 \Leftrightarrow K \times \exp(0) = 3 \Leftrightarrow K = 3$$

La solution s'écrit $f(x) = 3 \times \exp(-ax)$.

Côté physique & chimie

Un échantillon contient initialement $N_0 = 3 \times 10^9$ noyaux radioactifs dont la constante radioactive est λ.

Le nombre de noyaux radioactifs encore présents à l'instant t est noté $N(t)$.

1. Donner l'expression de l'équation différentielle vérifiée par $N(t)$.

2. Exprimer $N(t)$ en fonction de λ et t.

Méthode

1. L'équation différentielle vérifiée par $N(t)$ s'écrit :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \times N(t)$$

La fonction dérivée $\frac{dN(t)}{dt}$ est proportionnelle à la fonction N. La solution est donc de la forme $N(t) = K \times \exp(-\lambda t)$.

2. On utilise la condition initiale :

$$N(0) = N_0 \Leftrightarrow K = N_0 = 3 \times 10^9$$

La solution s'écrit $N(t) = N_0 \times \exp(-\lambda t)$
soit $N(t) = 3 \times 10^9 \times \exp(-\lambda t)$.

À retenir !

La solution d'une équation différentielle de la forme $f'(x) + a \times f(x) = 0$, avec pour condition initiale $f(0) = K$, a pour unique solution $f(x) = K \times \exp(-ax)$.

Côté maths 4 : Résoudre une équation du second degré

Côté maths

Résoudre l'équation :

$$2x^2 - x - 6 = 0.$$

Méthode

- L'équation est de la forme :

$$ay^2 + by + c = 0$$

avec $a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$.

- Le discriminant est :

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

- Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions réelles :

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2$$

et

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2}.$$

Côté physique & chimie

Soit une solution aqueuse d'acide faible de concentration en acide AH apporté $C = 1{,}0 \times 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Calculer son pH.

Donnée

$K_A(AH(aq) / A^-(aq)) = 10^{-4,8}$.

Méthode

Équation	$AH(aq)$	+ $H_2O(\ell)$	$\rightleftharpoons$ $A^-(aq)$	+ $H_3O^+(aq)$
État initial	$n_i = C \times V$	Solvant	0	0
État final (x_f)	$n_i - x_f$	Solvant	x_f	x_f

Donc $[A^-]_{éq} = [H_3O^+]_{éq}$ et $[AH]_{éq} = C - [H_3O^+]_{éq}$.

La constante d'acidité K_A s'écrit : $K_A = \dfrac{[A^-]_{éq} \times [H_3O^+]_{éq}}{[AH]_{éq}} = \dfrac{[H_3O^+]_{éq}^2}{C - [H_3O^+]_{éq}}$

Donc $[H_3O^+]_{éq}^2 + K_A \times [H_3O^+]_{éq} - K_A \times C = 0$

Soit $[H_3O^+]_{éq}^2 + 10^{-4,8} \times [H_3O^+]_{éq} - 10^{-6,8} = 0$

En posant $y = [H_3O^+]_{éq}$, on obtient l'équation du second degré :

$$y^2 + 10^{-4,8}\, y - 10^{-6,8} = 0$$

- L'équation est de la forme $ay^2 + by + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 10^{-4,8}$ et $c = -10^{-6,8}$.
- Le discriminant est : $\Delta = (10^{-4,8})^2 - 4 \times (-10^{-6,8}) \approx 6{,}3 \times 10^{-7} > 0$.
- Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions réelles. Seule la solution positive a un sens en chimie car une concentration est toujours positive :

$$y = [H_3O^+]_{éq} = \frac{-10^{-4,8} + \sqrt{6{,}3 \times 10^{-7}}}{2} = 3{,}9 \times 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et $\text{pH} = -\log\,[H_3O^+]]_{éq} = -\log\,(3{,}9 \times 10^{-4}) = 3{,}4$.

À retenir ! L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec un discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ positif admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Côté maths 5 : Écrire une dérivée – Dériver une fonction

Côté maths

On dispose de la fonction f définie pour tout x par :

$$f = 10x^2 - 8x + 5$$

1. Exprimer la dérivée f' de f sous la forme différentielle et donner l'expression de f'.
2. Calculer le nombre dérivé en $x = 1$.
3. Exprimer la dérivée seconde f'' de f sous la forme différentielle et donner l'expression de f''.

Méthode

1. La notation différentielle f' de la dérivée de f s'écrit $\dfrac{df}{dx}$ et se lit : « dérivée de f par rapport à x ».
Les formules de dérivation conduisent à :

$$\frac{df}{dx} = f' = 20x - 8$$

2. Le nombre dérivé en $x = 1$ est $f'(1) = 12$.
3. La notation différentielle f'' de la dérivée seconde de f s'écrit $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ et se lit : « dérivée seconde de f par rapport à x ». On peut encore écrire $\dfrac{d^2f}{dx^2} = \dfrac{df'}{dx}$.
Les formules de dérivation conduisent à : $\dfrac{d^2f}{dx^2} = f'' = 20$.

Côté physique & chimie

L'équation horaire, en unités SI, du mouvement d'un point mobile qui se déplace suivant un axe Ox est :

$$x = 10t^2 - 8t + 5$$

1. Exprimer la coordonnée v_x du vecteur vitesse de ce point mobile.
2. Calculer la valeur de la vitesse à la date $t = 1$ s.
3. Exprimer la coordonnée a_x du vecteur accélération du point mobile.

Méthode

1. La coordonnée v_x du vecteur vitesse est la dérivée de l'abscisse du vecteur position par rapport au temps :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 20t - 8 \ (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

2. À la date $t = 1$ s, la coordonnée v_x est : $v_x(1) = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Pour ce mouvement selon l'axe Ox, la valeur de la vitesse à cette date est donc :

$$v(1) = \sqrt{v_x(1)^2 + v_y(1)^2} = \sqrt{v_x(1)^2 + 0^2} = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3. La coordonnée a_x du vecteur accélération est la dérivée seconde de l'abscisse x du vecteur position par rapport au temps. C'est aussi la dérivée de l'abscisse v_x du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 20 \ (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

À retenir !

	Fonctions généralement étudiées	Variable de dérivation	Notation de la dérivée
Mathématiques	Fonctions de x	x	f' ou $\dfrac{df}{dx}$
Physique-Chimie	Fonctions du temps t	t	$\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dv_y}{dt}$, etc.

Côté maths 6 : Déterminer la primitive d'une fonction

Côté maths

On considère la fonction f définie pour tout x par $f(x) = 5$.
1. Déterminer la fonction F_1, primitive de la fonction f, qui vérifie $F_1(0) = 2$.
2. Déterminer la fonction F_2, primitive de la fonction F_1, qui vérifie $F_2(0) = 0$.

Méthode

1. On recherche les fonctions F_1 telles que $F'_1(x) = 5$.
Les fonctions de la forme $F_1(x) = 5x + B$ le vérifient.
Comme $F_1(0) = 2$, il vient : $F_1(0) = 5 \times 0 + B = 2$, donc $B = 2$.
La fonction F_1 est définie par : $F_1(x) = 5x + 2$.

2. On recherche les fonctions F_2 telles que $F'_2(x) = 5x + 2$.
Les fonctions de la forme $F_2(x) = 2{,}5x^2 + 2x + C$ le vérifient.
Comme $F_2(0) = 0$, il vient : $F_2(0) = 2{,}5 \times 0^2 + 2 \times 0 + C = 0$, donc $C = 0$.
La fonction F_2 est définie par : $F_2(x) = 2{,}5x^2 + 2x$.

Côté physique & chimie

La coordonnée a_z de l'accélération d'une balle lâchée sans vitesse initiale est $-10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
À l'instant initial, la balle est située en une position de coordonnée $z = 2{,}0$ m.
1. Exprimer la coordonnée v_z du vecteur vitesse de cette balle.
2. Exprimer la coordonnée z de son vecteur position.

Méthode

1. La coordonnée v_z de la vitesse est la primitive de celle a_z de l'accélération par rapport au temps : $v_z = -10t + C_1$.
Comme à $t_0 = 0$ s, $v_z(0) = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, il vient :
$v_z(0) = -10 \times 0 + C_1 = 0$, donc $C_1 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
La coordonnée v_z a pour expression : $v_z = -10t \ (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$.
2. La coordonnée z du vecteur position est la primitive de celle v_z de la vitesse par rapport au temps : $z = -5t^2 + C_2$.
Comme à $t_0 = 0$ s, $z(0) = 2{,}0$ m, il vient :
$z(0) = -5 \times 0^2 + C_2 = 2{,}0$ m, donc $C_2 = 2{,}0$ m.
La coordonnée z a pour expression : $z = -5t^2 + 2{,}0$ (m).

À retenir !

Soit F et f deux fonctions définies sur un intervalle I.
La fonction F est une primitive de f sur I si : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Côté maths 7 : Résoudre une équation différentielle de second membre constant et non nul

Côté maths

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :
$y' = -4y + 8$ avec la condition $y(0) = 4$.

Méthode

Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$), les solutions sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont donc :
$y = K \times e^{-4x} - \frac{8}{(-4)} = K \times e^{-4x} + 2$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Or, $y(0) = 4$, donc $4 = K + 2$, soit $K = 2$.

L'unique solution de cette équation différentielle avec la condition $y(0) = 4$ est donc : $y = 2e^{-4x} + 2$.

Côté physique & chimie

Déterminer la solution de l'équation différentielle :
$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{h \times S}{m \times c} \times \theta + \frac{h \times S}{m \times c} \times \theta_e$ avec $\theta(0) = \theta_i$

Méthode

Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ s'écrivent $y = K \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $K \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Par analogie, les solutions de l'équation différentielle proposée sont : $\theta = K \times e^{-\frac{h \times S}{m \times c} \times t} + \theta_e$.

Sachant que $\theta(0) = \theta_i$ on trouve $K = \theta_i - \theta_e$.

L'unique solution de cette équation différentielle vérifiant $\theta(0) = \theta_i$ est donc : $\theta = (\theta_i - \theta_e) \times e^{-\frac{h \times S}{m \times c} \times t} + \theta_e$.

À retenir !

Théorème – Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ s'écrivent :

$$y = K \times e^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$

Côté maths 8 : Utiliser la fonction logarithme décimal et sa fonction réciproque

Côté maths

1. En arrondissant au centième, montrer que, pour tout $a > 0$:

$$\log(2a) \approx \log a + 0{,}30$$

2. Montrer que, pour $b \neq 0$ et $c > 0$:

$$a = b \times \log c \Leftrightarrow c = 10^{\frac{a}{b}}$$

Méthode

1. Vérification de $\log(2a) \approx \log a + 0{,}30$

• J'utilise la propriété du log pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

En remplaçant b par 2, il vient :

$$\log(a \times 2) = \log a + \log 2$$

• J'utilise la calculatrice en arrondissant au centième :

$$\log 2 \approx 0{,}30$$

Donc $\log(2a) \approx \log a + 0{,}30$.

2. Vérification de $a = b \times \log c \Leftrightarrow c = 10^{\frac{a}{b}}$

• Je divise la première équation par b (pour $b \neq 0$ et $c > 0$) :

$$\log c = \frac{a}{b}$$

• J'utilise la propriété $\log c = d \Leftrightarrow c = 10^d$.

Comme $\log c = \frac{a}{b}$, alors il vient $c = 10^{\frac{a}{b}}$.

Donc $a = b \times \log c \Leftrightarrow c = 10^{\frac{a}{b}}$.

Côté physique & chimie

1. Montrer que lorsque l'intensité sonore est multipliée par 2, alors le niveau d'intensité sonore augmente de 3 dB.
2. Calculer l'intensité sonore correspondant à un niveau d'intensité sonore de 75 dB.

Donnée

Intensité sonore de référence : $I_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Méthode

1. Le niveau d'intensité sonore est : $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

• En utilisant la propriété du log pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

En notant L' le niveau d'intensité sonore obtenu, il vient :

$$L' = 10 \log\left(\frac{I \times 2}{I_0}\right) = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) + 10 \log 2 = L + 10 \log 2$$

• Or $10 \log 2 \approx 3$. Donc $L' = L + 3$.

2. La relation $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ s'écrit aussi $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{L}{10}$.

• En utilisant la propriété du log pour $c > 0$:

$\log c = d \Leftrightarrow c = 10^d$, il vient $\frac{I}{I_0} = 10^{\frac{L}{10}}$ et donc $I = I_0 \times 10^{\frac{L}{10}}$.

• $I = 1{,}0 \times 10^{-12}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \times 10^{\frac{75\ \text{dB}}{10\ \text{dB}}} = 3{,}2 \times 10^{-5}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

À retenir !

• Pour tous réels a et b strictement positifs, on a : $\log(a \times b) = \log a + \log b$ et $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

• Pour tous réels c et d avec c strictement positif, on a : $\log c = d \Leftrightarrow c = 10^d$.

Côté maths 9 : Résoudre une équation différentielle

Côté maths

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 2y + 5$ pour laquelle $y(0) = 1$.

Méthode

Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$), il existe un ensemble de solutions de la forme :

$$y = K \times e^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

Les solutions de cette équation sont donc :

$$y = K \times e^{2x} - \frac{5}{2} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

Or, $y(0) = 1$, donc $1 = K - \frac{5}{2}$, soit $K = \frac{7}{2}$.

L'unique solution de cette équation différentielle vérifiant $y(0) = 1$ est donc : $y = \frac{7}{2}e^{2x} - \frac{5}{2}$.

Côté physique & chimie

Déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$u_C + R \times C \times \frac{du_C}{dt} = 0 \text{ avec } u_C(0) = E$$

Méthode

L'équation différentielle peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{R \times C}$$

Or les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ s'écrivent $y = K \times e^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $K \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Par analogie, on trouve comme solutions pour l'équation différentielle proposée : $u_C = K \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$.

Sachant que $u_C(0) = E$, on trouve $K = E$.

L'unique solution de cette équation différentielle vérifiant $u_C(0) = E$ est donc : $u_C = E \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$.

À retenir !

Théorème : Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ sont $y = K \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $K \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.